Problemas con funciones derivables

1 El espacio recorrido por un móvil viene dado por la ecuación $s(t) = 3t + 5$

a) Demostrar que la velocidad media es constante en cualquier intervalo [a, b].
b) Compararla con la velocidad instantánea.

2 La altura, en metros, alcanzada al cabo de t segundos por un proyectil lanzado verticalmente hacia arriba viene dada por la función $f(t) = 20t - 2t^2$. Hallar la velocidad media en el intervalo de tiempo comprendido entre t = 0 y t = 5.

3 Una población bacteriana tiene un crecimiento dado por la función $p(t) = 100t^2 + 5000$, siendo t el tiempo medido en horas. Se pide:

a) La velocidad media de crecimiento.
b) La velocidad instantánea de crecimiento para cada valor de t
c) La velocidad de crecimiento instantáneo para t_0 = 10 horas.

4 El perfil de una carretera viene dado en un tramo de montaña por la función $f(x) = \sqrt{x}$. ¿Qué señal de tráfico habría que colocar en x = 20, estando x medido en metros?

5 El trazado de un tobogán de Aquápolis tiene forma de un arco de hipérbola de ecuación

$$f(x) = \frac{8}{x+2} \quad \text{con } x > 0$$

Calcular la velocidad en el tobogán a 1, 2, 3 y 4 m de distancia de la vertical de lanzamiento.

6 El espacio recorrido por un móvil viene dado por la función $s(t) = 3t^2 - t + 1$

a) Hallar la tasa de variación en el intervalo [2, 6].
b) Hallar la velocidad en el instante t = 0
c) Hallar la ecuación de la velocidad sabiendo que es la derivada del espacio.
d) Hallar la ecuación de la aceleración sabiendo que es la derivada de la velocidad.

7 Una mancha circular de petróleo tiene un radio de 40 metros. Calcula:

a) La variación que sufre su área si el radio aumenta 5 metros.
b) La tasa de variación media al pasar el radio de 40 a 45 metros.
c) La tasa de variación media al pasar el radio de 40 a 42 metros.
d) La tasa de variación instantánea.

8 Tras un estudio demográfico, se ha determinado que el número de habitantes de cierta población, en los próximos años, vendrá dado por la función

$f(x) = \dfrac{14500x + 7200}{2x+1}$ donde x es el número de años transcurridos de ahora en adelante.

a) Calcula la variación media de la población entre x = 2 y x = 4.
b) ¿Cuál es la variación instantánea de la población transcurridos 4 años?

9 Durante varias semanas se ha estado registrando la velocidad del tráfico de cierta salida de una autopista. Los datos parecen confirmar que entre las 12:00 y las 18:00 horas de un día laborable, la velocidad del tráfico en la salida es aproximadamente de $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x + 40$ kilómetros por hora, donde x es el número de horas que han transcurrido desde el mediodía. ¿En qué momento, entre el mediodía y las 18:00 horas, el tráfico ha sido más lento? ¿Y en cuál ha sido más rápido?

10 El beneficio, en euros, de una empresa viene dado por la función $f(x)=230+20x-\frac{1}{2}x^2$, donde x es la cantidad (en cientos de euros) que la empresa gasta en publicidad.

a) ¿Qué beneficio obtendría la empresa si no gastase nada en publicidad?

b) ¿Cuál es el valor de x que hace máximo el beneficio?

c) ¿Cuál es el valor de ese beneficio máximo?

11 Un estudio de productividad en el turno matinal de una cierta fábrica indica que un trabajador medio que llega a la fábrica a las 8:00 de la mañana habrá montado $f(x)=-x^3+6x^2+15$ piezas a las x horas después de haber empezado a trabajar. ¿En qué momento de la mañana está trabajando con la máxima eficacia?

12 A partir de un estudio medioambiental en un barrio de una ciudad, se estima que el nivel medio diario de monóxido de carbono en el aire es de $f(x)=\sqrt{0,5x^2+17}$ partes por millón, cuando la población sea de x miles de habitantes. Por otra parte, se cree que la población dentro de t años será de $x(t)=3200+100t^2$ habitantes. ¿A qué ritmo estará cambiando el nivel de monóxido de carbono con respecto del tiempo, dentro de diez años?

13 Si los teléfonos móviles se venden aproximadamente a x euros cada uno, los consumidores de una ciudad compran $D(x)=\frac{5000}{x}$ unidades (a esta función se le llama *función de demanda*). Se estima que, debido a la evolución del precio de los componentes de los teléfonos móviles, su precio será de $x(t)=0,03t^2+15$ euros dentro de t meses.

a) Calcula el ritmo de cambio mensual de la demanda de teléfonos móviles dentro de veinte meses.

b) En ese momento la demanda, ¿crece o decrece?