

Nota	

Prueba 2.02 - 1º Bach C

Números complejos



Nombre: 15/02/10

Valor	Nota
15	

1. Dados los siguientes números complejos:

$$z_1 = 2 - 3i; \quad z_2 = 4i; \quad z_3 = 3 + i$$

Calcular:

a) $z_1 \cdot z_2 - z_3$; b) $\frac{z_1}{z_2}$; c) $(z_1)^2 + \overline{z_2} \cdot z_3$

a) $z_1 \cdot z_2 - z_3 = (2 - 3i) \cdot 4i - (3 + i) = 8i + 12 - 3 - i = \boxed{9 + 7i}$

b) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 - 3i}{4i} = \frac{(2 - 3i) \cdot (-i)}{(4i) \cdot (-i)} = \frac{-2i + 3i^2}{-4i^2} = \frac{-2i - 3}{4} = \boxed{\frac{-3 - 2i}{4}}$

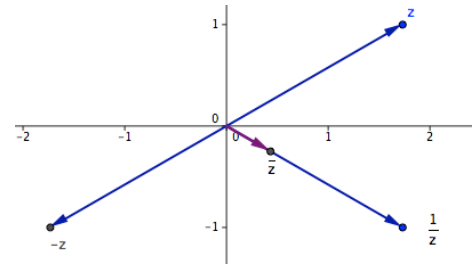
c) $(z_1)^2 + \overline{z_2} \cdot z_3 = (2 - 3i)^2 + (-4i) \cdot (3 + i) = 4 - 12i + 9i^2 - 12i - 4i^2 = 4 - 9 - 24i + 4 = \boxed{-1 - 24i}$

Valor	Nota
10	

2. Dado el complejo $\sqrt{3} + i$, di cuáles son su opuesto, su conjugado y su inverso y haz su representación gráfica

Si $z = \sqrt{3} + i$ entonces:

$$\boxed{-z = -\sqrt{3} - i}; \quad \boxed{\overline{z} = \sqrt{3} - i}; \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{\sqrt{3} + i} = \frac{\sqrt{3} - i}{(\sqrt{3} + i) \cdot (\sqrt{3} - i)} = \boxed{\frac{\sqrt{3} - i}{4}}$$



Valor	Nota
10	

3. Encontrar todas las soluciones reales y complejas de las siguientes ecuaciones:

a) $z^3 - 2z^2 + 2z = 0$; b) $i \cdot z^3 + 8 = 0$

a) Primero sacamos factor común z :

$$z(z^2 - 2z + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ z^2 - 2z + 2 = 0 \Rightarrow z = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = \begin{cases} z = 1 + i \\ z = 1 - i \end{cases} \end{cases}$$

b) $i z^3 + 8 = 0 \Rightarrow i z^3 = -8 \Rightarrow z^3 = \frac{-8}{i} = \frac{-8i}{i^2} = 8i = 8_{90^\circ}$

Y ahora para hallar las soluciones sacamos las raíces cúbicas:

$$z = \sqrt[3]{8_{90^\circ}} = \sqrt[3]{8 \frac{90^\circ + 360^\circ k}{3}} \text{ (con } k=0,1,2) = 2_{30^\circ + 120^\circ k} \text{ (con } k=0,1,2) = \begin{cases} z_1 = 2_{30^\circ} = 1 + \sqrt{3}i \\ z_2 = 2_{150^\circ} = -1 + \sqrt{3}i \\ z_3 = 2_{270^\circ} = -2i \end{cases}$$

Valor	Nota
15	

4. Expresar en forma polar y trigonométrica los siguientes números complejos: :

a) $-3i$; b) $-1 + i$; c) $2\sqrt{3} - 2i$

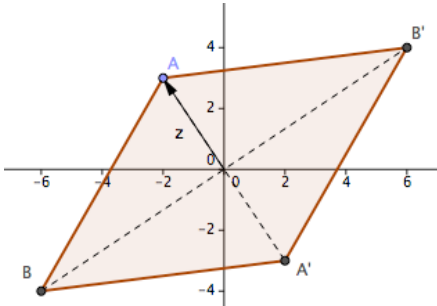
a) $z_1 = -3i \Rightarrow \begin{cases} |z_1| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = 3 \\ \tan \alpha = \frac{-3}{0} \text{ (3º cuad)} \Rightarrow \alpha = 270^\circ \end{cases} \Rightarrow \boxed{z_1 = 3_{270^\circ} = 3 \cdot (\cos 270^\circ + i \cdot \sen 270^\circ)}$

b) $z_2 = -1 + i \Rightarrow \begin{cases} |z_2| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \tan \alpha = \frac{1}{-1} \text{ (2º cuad)} \Rightarrow \alpha = 135^\circ \end{cases} \Rightarrow \boxed{z_2 = \sqrt{2}_{135^\circ} = \sqrt{2} \cdot (\cos 135^\circ + i \cdot \sen 135^\circ)}$

$$c) z_3 = 2\sqrt{3} - 2i \Rightarrow \begin{cases} |z_3| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-2)^2} = 4 \\ \tan \alpha = \frac{-2}{-2\sqrt{3}} \text{ (4º cuad.)} \Rightarrow \alpha = 330^\circ \end{cases} \Rightarrow \boxed{z_3 = 4_{330^\circ} = 4 \cdot (\cos 330^\circ + i \cdot \sen 330^\circ)}$$

Valor	Nota
10	

5. Un rombo tiene su centro en el origen de coordenadas y su diagonal mayor de doble longitud que su diagonal menor. Uno de los vértices de la diagonal menor es el punto correspondiente al número complejo $-2 + 3i$. Averigua los afijos correspondientes al resto de los vértices del rombo



El vértice B, se obtiene a partir de z_1 , el afijo del vértice A, multiplicándolo por un complejo de módulo 2 y argumento 90° , es decir $2_{90^\circ} = 2i$: $(-2 + 3i) \cdot 2i = -4i + 6i^2 = -4i - 6 \Rightarrow B(-6, -4)$
 A' y B' son los afijos de los opuestos de los otros dos vértices.

Luego son: $A'(2, -3)$ y $B'(6, 4)$.

Valor	Nota
10	

6. Hallar a y b para que se cumpla la siguiente igualdad:

$$\frac{a + 19i}{-5 + bi} = 3 - 2i$$

$$\frac{a + 19i}{-5 + bi} = 3 - 2i \Rightarrow a + 19i = (3 - 2i)(-5 + bi) = -15 + 3bi + 10i - 2bi^2 = (-15 + 2b) + (3b + 10)i \Rightarrow \begin{cases} -15 + 2b = a \\ 3b + 10 = 19 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema queda que: $\boxed{a = -9}$ y $\boxed{b = 3}$.

Valor	Nota
10	

7. Calcular todas las raíces dando los resultados en forma binómica:

$$\sqrt[4]{-1 - \sqrt{3}i}$$

Hallamos el módulo y argumento del radicando: $\begin{cases} |z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \\ \tan \alpha = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3} \text{ (3º cuad.)} \Rightarrow \alpha = 240^\circ \end{cases}$. Por tanto:

$$\sqrt[4]{-1 - \sqrt{3}i} = \sqrt[4]{2_{240^\circ}} = \sqrt[4]{2_{\frac{240^\circ}{4} + \frac{360^\circ k}{4}} \text{ (con } k=0,1,2 \text{ y } 3)} = \sqrt[4]{2_{60^\circ + 90^\circ k \text{ (con } k=0,1,2 \text{ y } 3)}} = \begin{cases} z_1 = \sqrt[4]{2_{60^\circ}} = \sqrt[4]{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \\ z_2 = \sqrt[4]{2_{150^\circ}} = \sqrt[4]{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\ z_3 = \sqrt[4]{2_{240^\circ}} = \sqrt[4]{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) \\ z_4 = \sqrt[4]{2_{330^\circ}} = \sqrt[4]{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \end{cases}$$

Valor	Nota
10	

8. Dado el número complejo $z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

a) Calcula z^5 haciendo todo el cálculo en forma binómica.

b) Calcula z^{20} haciendo el cálculo en forma polar.

a) Aplicando el binomio de Newton:

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right)^5 = \binom{5}{0} \left(\frac{1}{2} \right)^5 + \binom{5}{1} \left(\frac{1}{2} \right)^4 \left(-\frac{1}{2}i \right)^1 + \binom{5}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^3 \left(-\frac{1}{2}i \right)^2 + \binom{5}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^2 \left(-\frac{1}{2}i \right)^3 + \binom{5}{4} \left(\frac{1}{2} \right)^1 \left(-\frac{1}{2}i \right)^4 + \binom{5}{5} \left(-\frac{1}{2}i \right)^5 =$$

$$= \left(\frac{1}{2} \right)^5 - 5 \left(\frac{1}{2} \right)^5 i - 10 \left(\frac{1}{2} \right)^5 + 10 \left(\frac{1}{2} \right)^5 i + 5 \left(\frac{1}{2} \right)^5 - \left(\frac{1}{2} \right)^5 i = \left(\frac{1}{2} \right)^5 (1 - 5i - 10 + 10i + 5 - i) = \left(\frac{1}{2} \right)^5 (-4 + 4i) = \boxed{-\frac{1}{8} + \frac{1}{8}i}$$

b) Calculamos el módulo y argumento de z :
$$\begin{cases} |z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \tan \alpha = \frac{-1/2}{1/2} = -1 \text{ (4º cuad)} \Rightarrow \alpha = 315^\circ \end{cases}, \text{ luego:}$$

$$z^{20} = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^{20} = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^{315^\circ \cdot 20} = \left(\frac{1}{2^{10}}\right)_{6300^\circ} = \left(\frac{1}{1024}\right)_{180^\circ + 17 \cdot 360^\circ} = \left(\frac{1}{1024}\right)_{180^\circ} = \boxed{-\frac{1}{1024}}$$

Valor	Nota
10	

9. El producto de dos números complejos es $2i$ y el cubo de uno de ellos dividido por el otro es $1/2$. Hállalos

Llamaremos z y w a los dos números complejos que buscamos. Deben cumplir que:
$$\begin{cases} z \cdot w = 2i \\ \frac{z^3}{w} = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Despejamos w en la segunda ecuación: $w = 2z^3$ y sustituimos en la primera que queda:

$$z \cdot 2z^3 = 2i \Rightarrow z^4 = i \Rightarrow z = \sqrt[4]{i} = \sqrt[4]{1_{90^\circ}} = 1_{\frac{90^\circ + 360^\circ k}{4}} \text{ (con } k=0,1,2 \text{ y } 3) = 1_{22,5^\circ + 90^\circ k \text{ (con } k=0,1,2 \text{ y } 3)}$$

Salen cuatro soluciones para z y otras cuatro para w que son, respectivamente:

$$\begin{aligned} z_1 = 1_{22,5^\circ} &\Rightarrow w_1 = 2 \cdot (1_{22,5^\circ})^3 = 2_{67,5^\circ} \\ z_2 = 1_{112,5^\circ} &\Rightarrow w_2 = 2 \cdot (1_{112,5^\circ})^3 = 2_{337,5^\circ} \\ z_3 = 1_{202,5^\circ} &\Rightarrow w_3 = 2 \cdot (1_{202,5^\circ})^3 = 2_{247,5^\circ} \\ z_4 = 1_{292,5^\circ} &\Rightarrow w_4 = 2 \cdot (1_{292,5^\circ})^3 = 2_{157,5^\circ} \end{aligned}$$