Geometría Analítica ________________

Considerar el triángulo de vértices A(1, 1), B(9, –3) y C(5, 8). Utiliza papel cuadriculado para los dibujos y hazlos a una escala que permita ver las cosas con claridad. Todos los resultados que vas a comprobar en este triángulo se cumplen en cualquier otro triángulo:

1. Dibujar el triángulo. Con regla y compás, trazar las tres alturas del triángulo y comprobar que se cortan en un punto (Se llama *ortocentro* del triángulo).
   a) Averigua las ecuaciones de las tres alturas del triángulo.
   b) Encontrar el punto P donde se cortan dos de ellas.
   c) Comprobar que ese punto P, está en la tercera altura.
2. Volver a dibujar el triángulo y, con regla y compás, trazar las mediatrices de los tres lados. Comprobar que se cortan en un punto Q que es centro de una circunferencia que pasa por los tres vértices del triángulo (Se llama *circuncentro* del triángulo).
   a) Averiguar las ecuaciones de las tres mediatrices de los lados del triángulo.
   b) Encontrar el punto Q donde se cortan dos de ellas.
   c) Comprobar que ese punto Q, está en la tercera altura.
   d) Comprobar que ese punto Q se encuentra a igual distancia de los tres vértices.
3. Volver a dibujar el triángulo y, con regla y compás, trazar las medianas de los tres lados. Comprobar que se cortan en un punto G que divide cada mediana en dos trozos uno de los cuales mide el doble que el otro (Se llama *baricentro* del triángulo).
   a) Averiguar las ecuaciones de las tres medianas de los lados del triángulo.
   b) Encontrar el punto G donde se cortan dos de ellas.
   c) Comprobar que ese punto G, está en la tercera mediana.
   d) Comprobar que ese punto G está a doble distancia de uno de los vértices que del punto medio del lado opuesto. hacer lo mismo con los otros vértices.
4. Dibujar el triángulo y, con regla y compás, trazar las bisectrices de los tres lados. Comprobar que se cortan en un punto I que es centro de una circunferencia que es tangente a los tres lados del triángulo (Se llama *incentro* del triángulo).
   a) Averiguar las ecuaciones de las tres bisectrices de los lados del triángulo.
   b) Encontrar el punto I donde se cortan dos de ellas.
   c) Comprobar que ese punto I, está en la tercera bisectriz.
   d) Comprobar que ese punto I se encuentra a igual distancia de los tres lados.
5. Dibujar de nuevo el triángulo y los cuatro puntos encontrados en los ejercicios anteriores. Comprobar que el circuncentro, el baricentro y el ortocentro están alineados (La recta que los contiene se llama *recta de Euler*)
   a) Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el baricentro y el circuncentro.
   b) Comprobar que el ortocentro está en la recta cuya ecuación acabas de calcular.
   c) Comprobar que la distancia del baricentro al circuncentro es la mitad que la que le separa del ortocentro.

En los problemas siguientes haz siempre un dibujo para ayudarte a plantearlos y resolverlos.

1. Dado el triángulo ABC, cuyos vértices tienen de coordenadas A(–2,4), B(6,2) y C(0,–4);
    a) Hallar lar coordenadas de los puntos medios de los tres lados D, E y F.
    b) Comprobar que el triángulo DEF es semejante al triángulo ABC.

2. Comprobar que:
    a) A(3, 9), B(7 ,5), C(4, –1) y D(0, 3) son los vértices de un paralelogramo.
    b) A(4, 6), B(5,1) y C(2, 4) son los vértices de un triángulo rectángulo.
    c) A(1, 4), B(3, 5), C(–3, 12) y D(–1,13) son los vértices de un rectángulo.

3. A(–3, 6), B(5. 7) y C(9, 0) son vértices de un rombo ABCD. Encontrar las coordenadas del cuarto vértice D.

4. ABCD es un paralelogramo con vértices A(3, 6), B(5, 9) y C(8, 2). Encontrar las coordenadas del vértice D.

5. ABCD es un cuadrado en el que los vértices A(0, 4) y B(–3, 2) están en el mismo lado. Encontrar las coordenadas de los otros dos vértices C y D.

6. Sean los puntos A(–2, 0), B(6, 4) y C(x, 0). Hallar x para que el ángulo ABC sea recto. ¿Cuál es el área del triángulo ABC?

7. Hallar las coordenadas de los puntos de la recta $r: 2x + 3y + 4 = 0$, que están a distancia 2 de la recta $s: 3x + 4y - 6 = 0$.

8. Los puntos A(–1, 3) y B(3, –3) son dos vértices de un triángulo isósceles, cuyo vértice C está sobre la recta $r: 2x - 4y + 3 = 0$. AC y BC son los dos lados iguales del triángulo. Calcular las coordenadas de C.

9. Dado el triángulo de vértices A(–1, –1), B(7, 5) y C(2, 7), determinar su ortocentro (es decir, el punto en el que se cortan las tres alturas)

10. Determinar el área de un paralelogramo OABC sabiendo que OA está sobre la recta de ecuación $x - 2y = 0$, que OC está en la recta de ecuación $2x + y = 0$ y que las coordenadas de B son (3, 5).

11. A(1, 2) y D(1, 0) son dos vértices consecutivos de un paralelogramo ABCD y M(2, 2) es el punto en el que se cortan sus diagonales. ¿Cuál es el área del paralelogramo?

12. Determinar los vértices B y D de un cuadrado ABCD del que sabemos las coordenadas de los vértices A(1, 2) y C(9, 6).

13. Dos vértices opuestos de un rombo son A(5, 5) y C(–1, –1). La longitud de la otra diagonal del rombo es 42 cm. Hallar las otros dos vértices y el área del rombo.

14. Un rombo tiene un vértice en el punto A(6, 1), una diagonal en la recta $r: 2x + y - 3 = 0$, y sabemos que su área es 20. Hallar las coordenadas de los restantes vértices.

15. De un trapecio rectángulo se conocen los vértices A(1, 1) y B(2, 1) y se sabe que un lado está en la recta $r: x - y + 1 = 0$. Hallar los otros vértices y calcular las longitudes de sus lados y de sus diagonales. ¿Cuál es su área?