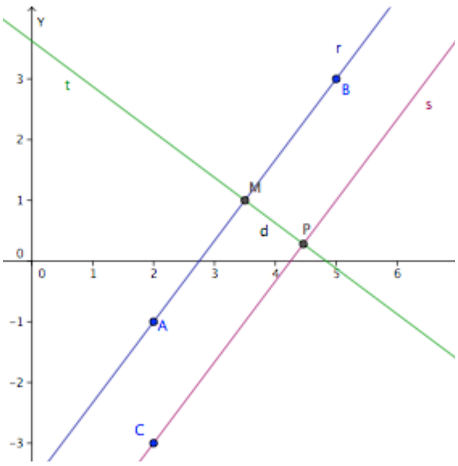
Nota

Prueba 2.03 - 1º Bach C
Geometría analítica

Nombre: 16/03/10

Valor	Nota
25	

1. Dados los puntos A(2, −1) y B(5, 3):
   a) Hallar la ecuación continua de la recta *r* que pasa por ellos.
   b) Hallar la ecuación general de la recta *s* paralela a *r* que pasa por el punto C(2, −3).
   c) Hallar la ecuación de la de la mediatriz *t* del segmento AB.
   d) Cuáles son las coordenadas del punto P en el que se cortan las rectas *s* y *t*.
   e) ¿A qué distancia de la recta *r* esta el punto P?



a) $\vec{v}_r = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (5,3) - (2,-1) = (3,4)$ es el vector de dirección de r; luego la ecuación continua de r es: $\boxed{r: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4}}$

b) La recta s tiene el mismo vector de dirección y pasa por C:

$s: \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{4} \Rightarrow 4x - 8 = 3y + 9 \Rightarrow \boxed{s: 4x - 3y - 17 = 0}$

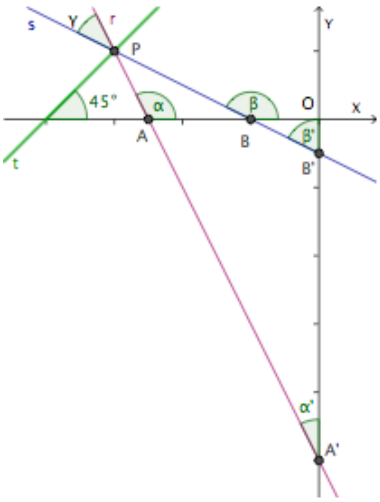
c) Hallamos M, el punto medio de AB: $M = \left(\frac{2+5}{2}; \frac{-1+3}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, 1\right)$; y como $t \perp r \Rightarrow \vec{v}_t \cdot \vec{v}_r = 0 \Rightarrow \vec{v}_t = (-4,3)$. Luego la ecuación de la recta t es: $t: \frac{x - \frac{7}{2}}{-4} = \frac{y-1}{3} \Rightarrow 3x - \frac{21}{2} = -4y + 4 \Rightarrow \boxed{6x + 8y - 29 = 0}$

d) Como $P = s \cap t$ es la solución del sistema formado por las dos ecuaciones: $\begin{cases} 4x - 3y - 17 = 0 \\ 6x + 8y - 29 = 0 \end{cases} \Rightarrow P = \left(\frac{223}{50}, \frac{7}{25}\right) = \boxed{(4{,}46; 0{,}24)}$

e) Para calcular la distancia aplicamos la fórmula: $d = d(P, r) = \left| \frac{4 \cdot 4{,}46 - 3 \cdot 0{,}24 - 11}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} \right| = \boxed{1{,}224}$

Valor	Nota
15	

2. Dadas las rectas de ecuaciones *r*: 2*x* + *y* + 5 = 0 y *s*: *x* + 2*y* + 1 = 0:
   a) Hallar la medida de los ángulos que forman cada una de estas rectas con los ejes de coordenadas.
   b) Hallar la medida del ángulo que forma entre si las dos rectas.
   c) Hallar la ecuación de la recta que pasan por el punto de corte de estas dos rectas y forma un ángulo de 45º con la parte positiva del eje OX.



a) Ponemos las ecuaciones de las dos rectas de forma explícita, lo que nos permite hallar las pendientes y a partir de ellas los ángulos:

$r: y = -2x - 5 \Rightarrow m_r = -2 \Rightarrow \tan\alpha = -2 \Rightarrow \boxed{\alpha = 116^o 34'}$

$s: y = -\frac{1}{2}x - 1 \Rightarrow m_s = -\frac{1}{2} \Rightarrow \tan\beta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\beta = 153^o 26'}$

Para hallar los ángulos con el eje Y hay que razonar con los triángulos que se forman: $\widehat{OAA'} = 180^o - \alpha = 63^o 26'$; $\widehat{OBB'} = 180^o - \beta = 26^o 34'$

en el triángulo OAA': $\alpha' + \widehat{OAA'} = 90^o \Rightarrow \alpha' = 90^o - \widehat{OAA'} = \boxed{26^o 34'}$

en el triángulo OBB': $\beta' + \widehat{OBB'} = 90^o \Rightarrow \beta' = 90^o - \widehat{OBB'} = \boxed{63^o 26'}$

b) Aplicando la fórmula:

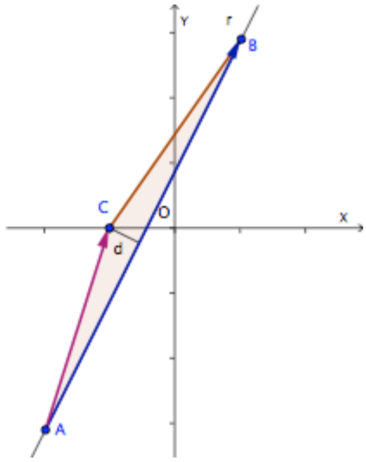
$$\tan\gamma = \frac{m_s - m_r}{1 + m_r m_s} = \frac{\left(\frac{-1}{2}\right) - 2}{1 + (-2)\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{\gamma = 36^o 52'}$$

c) El punto $P = r \cap s$ se halla resolviendo el sistema $\begin{cases} 2x + y + 5 = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(-3,1)}$

La recta t tiene pendiente $m_t = \tan 45^o = 1$; luego es de la forma y = x + b. Como pasa por P tendremos que 1 = -3 + b luego b = 4 y la ecuación de la recta es: $\boxed{t : y = x + 4}$

Valor	Nota
20	

3. Dados los puntos A(−2, −3), B(1,3) y C(-1, 0):
   a) Comprueba que no están alineados (no vale como respuesta un dibujo).
   b) Hallar el área del triángulo ABC.



a) Para mostrar que los tres puntos no están alineados basta mostrar que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ no tienen la misma dirección. Para ello se calculan los dos vectores:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (1,3) - (-2,-3) = (3,6) \\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (-1,0) - (-2,-3) = (1,3) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3}{1} \neq \frac{6}{3} \text{ luego } \overrightarrow{AB} \neq k \cdot \overrightarrow{AC}$$

b) La base del triángulo es, por ejemplo, la distancia entre A y B:

$$\text{base} = d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

La altura correspondiente a esta base es la distancia desde C hasta la recta r. Primero hallamos la ecuación general de r:

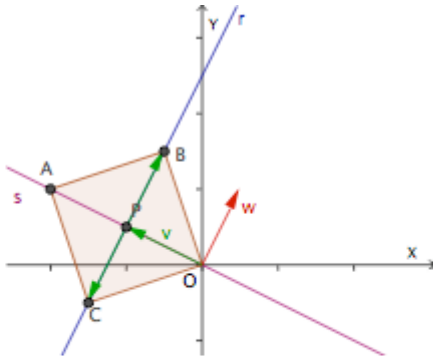
$$r : \frac{x+2}{3} = \frac{y+3}{6} \Rightarrow 6x + 12 = 3y + 9 \Rightarrow \boxed{r : 2x - y + 1 = 0} \text{ ; luego:}$$

$$\text{altura} = d(C,r) = \left|\frac{2(-1) - y \cdot 0 + 1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Por lo tanto el área del triángulo es: $\text{Área} = \dfrac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \dfrac{3\sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}}{2} = \boxed{\dfrac{3}{2}}$

Valor	Nota
20	

4. Dada la recta de ecuación *r*: 4*x* − 2*y* + 5 = 0:
   a) Hallar el punto P donde se corta con la recta perpendicular *s* trazada desde el origen de coordenadas.
   b) Si O es un vértice de un cuadrado y P el centro del mismo, ¿cuáles son las coordenadas de los otros tres vértices?



a) El vector de dirección de r es: $\vec{v_r} = (2,4)$ por lo que el vector de dirección de sus perpendiculares será: $\vec{v_s} = (4,-2)$. Como la recta s pasa por el origen de coordenadas su ecuación continua será:

$$s : \frac{x-0}{4} = \frac{y-0}{-2} \Rightarrow -2x = 4y \Rightarrow \boxed{s : x + 2y = 0}$$

Para hallar $P = s \cap r$ hay que resolver el sistema: $\begin{cases} 4x - 2y + 5 = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$

Luego $P = \left(-1, \frac{1}{2}\right)$

b) Observamos la figura: los puntos A, B y C están determinados por los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$. Los calculamos:

$\vec{v} = \overrightarrow{OP} = \left(-1, \frac{1}{2}\right)$ y $\vec{w} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{w} = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Luego:

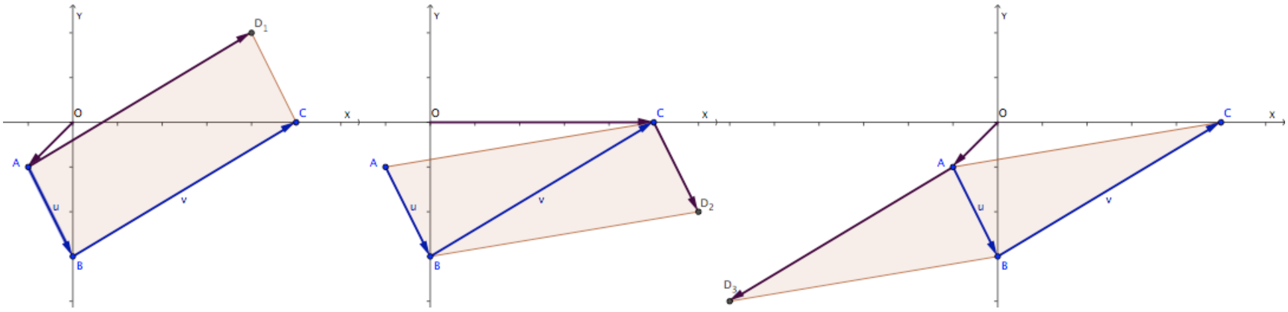
$$\overrightarrow{OA} = 2 \cdot \vec{v} = 2 \cdot \left(-1, \frac{1}{2}\right) = (-2,1) \Rightarrow \boxed{A = (-2,1)}$$

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OP} + \vec{w} = \left(-1, \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}, 1\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \Rightarrow \boxed{B = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)}$$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP} + (-\vec{w}) = \left(-1, \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}, 1\right) = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \boxed{C = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)}$$

Valor	Nota
20	

5. Dados los tres puntos A(−1, −1), B(0, -3) y C(5,0)
   a) ¿Cuántos paralelogramos hay que los tengan por vértices?
   b) En cada uno de los caso, calcula las coordenadas del cuarto vértice.
   c) Halla el área de uno de ellos



a) Los tres vértices son, necesariamente, consecutivos, pero hay tres posibilidades de disponerlos para formar un paralelogramos, como se ve en las figuras anteriores.

b) Primero calculamos los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (0,-3)-(-1,-1) = (1,-2) \quad y \quad \vec{v} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = (5,0)-(0,-3) = (5,3)$$

Los vértices que faltan se obtienen sumando vectores:

$$\overrightarrow{OD_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{OA} + \vec{v} = (-1,-1)+(5,3) = (4,2) \Rightarrow \boxed{D_1 = (4,2)}$$

$$\overrightarrow{OD_2} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD_2} = \overrightarrow{OC} + (\vec{u}) = (5,0)+(1,-2) = (6,-2) \Rightarrow \boxed{D_2 = (6,-2)}$$

$$\overrightarrow{OD_3} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD_3} = \overrightarrow{OA} + (-\vec{v}) = (-1,-1)-(5,3) = (-6,-4) \Rightarrow \boxed{D_3 = (-6,-4)}$$

c) Calculamos el área de la primera solución, $ABCD_1$. La base del paralelogramo es la distancia de B a c y la altura la distancia de A a la recta, r, que pasa por B y C. Primero hallamos la ecuación de esta recta: $r: \dfrac{x-0}{5} = \dfrac{y-(-3)}{3} \Rightarrow 3x = 5y+15 \Rightarrow \boxed{r: 3x-5y-15=0}$

Calculamos la base y la altura:

$$\left.\begin{array}{l} base = d(B,C) = \sqrt{(5-0)^2+(0-(-3))^2} = \sqrt{34} \\ altura = d(A;r) = \left|\dfrac{3\cdot(-1)-5\cdot(-1)-15}{\sqrt{3^2+(-5)^2}}\right| = \dfrac{13}{\sqrt{34}} \end{array}\right\} \Rightarrow Área = base \times altura = \sqrt{34}\cdot\dfrac{13}{\sqrt{34}} = 13$$

Luego el área son <u>13 unidades cuadradas</u>.