

Nota	

Prueba 2.01 - 2º Bach C

Geometría



Nombre: 11/01/11

Valor	Nota
25	

1. Dado el plano $\pi : 2x - 3y + z - 11 = 0$, determinar:

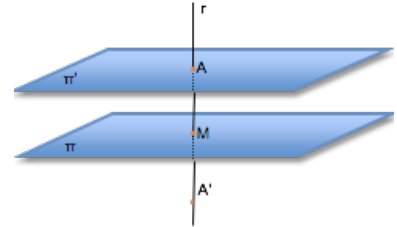
- La ecuación de un plano π' , paralelo a π que contenga al punto A (1, 1, -2).
- Las coordenadas del punto A' simétrico de A respecto del plano π .

a) La ecuación del plano paralelo π' es de la forma: $2x - 3y + z + k = 0$. Como debe pasar por A, sus coordenadas deben cumplir la ecuación, es decir:

$$2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + (-2) + k = 0 \Rightarrow k = 3, \text{ luego la ecuación es: } \boxed{\pi': 2x - 3y + z + 3 = 0}.$$

b) El punto de corte M de la recta r perpendicular a π y que pasa por A con el plano π , es punto medio del segmento AA'. Hallamos la ecuación de la recta r sabiendo que su vector de dirección es el vector

de dirección del plano π : $n = (2, -3, 1)$: $r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - 3\lambda \\ z = -2 + \lambda \end{cases}$.



El punto M es la intersección del plano π y la recta r . Sustituyo en la ecuación del plano las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$2 \cdot (1 + 2\lambda) - 3 \cdot (1 - 3\lambda) + (-2 + \lambda) - 11 = 0 \Rightarrow 2 + 4\lambda - 3 + 9\lambda - 2 + \lambda - 11 = 0 \Rightarrow 14\lambda - 14 = 0 \Rightarrow \lambda = 1.$$

Por lo tanto las coordenadas del punto M son; M (3, -2, -1). Como las coordenadas de M son la semisuma de las de A y las de A' (a, b, c), tenemos que:

$$\frac{1+a}{2} = 3 \Rightarrow a = 5; \quad \frac{1+b}{2} = -2 \Rightarrow b = -5; \quad \frac{1+c}{2} = -1 \Rightarrow c = -3, \text{ luego } \boxed{A'(5, -5, -3)}.$$

Valor	Nota
25	

2. Dada la recta $r: \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$

- Hallar su vector de dirección.
- La ecuación de la recta r' , paralela a r que pasa por P (1, 0, -1).
- Ecuación del plano π perpendicular a r que pasa por P.

a) Hallamos dos puntos distintos de la recta:

$$x=0 \Rightarrow \begin{cases} y+z=1 \\ 2y-z=2 \end{cases} \Rightarrow y=1; z=0 \Rightarrow A(0,1,0)$$

$$x=1 \Rightarrow \begin{cases} 2+y+z=1 \\ 1+2y-z=2 \end{cases} \Rightarrow y=0; z=-1 \Rightarrow B(1,0,-1)$$

El vector de dirección es el vector $v_r = \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (1, 0, -1) - (0, 1, 0) \Rightarrow \boxed{v_r = (1, -1, -1)}$.

b) La recta r' tiene el mismo vector de dirección que r y pasa por P. Su ecuación continua es: $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{-1}$.

c) El vector normal del plano π es el vector de dirección de la recta r , y sabemos que pasa por P, luego la ecuación del plano es:

$$n \cdot \overline{PX} = 0 \Rightarrow v_r \cdot (x-1, y-0, z+1) = 0 \Rightarrow (1, -1, -1)(x-1, y, z+1) = 0 \Rightarrow 1 \cdot (x-1) - 1 \cdot y - 1 \cdot (z+1) = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: x - y - z - 2 = 0}$$

Valor	Nota
25	

4. Dados las rectas siguientes:

$$r_1: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{0} \quad y \quad r_2: \begin{cases} kx + y = 2k + 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

- a) Determinar su posición relativa según los valores del parámetro k .
 b) Hallar a qué distancia están una de la otra en el caso de ser paralelas.

a) Para estudiar la posición relativa expresamos las ecuaciones como intersecciones de planos y estudiamos el rango del sistema formado por ellas:

$$r_1: \begin{cases} \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{1} \\ \frac{x-1}{-1} = \frac{z}{0} \end{cases} \Rightarrow r_1: \begin{cases} x-1 = -y+1 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow r_1: \begin{cases} x+y=2 \\ z=0 \end{cases}$$

. La matriz del sistema es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ k & 1 & 0 & 2k+1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$. Usamos el método de Gauss:

$$r_2: \begin{cases} kx + y = 2k + 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} F_3 - kF_1 \\ F_2 \\ F_4 - F_2 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1-k & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} \text{si } k \neq 1 \Rightarrow \text{rango}(M) = 3 \neq \text{rango}(MA) = 4 \Rightarrow \text{las rectas se cruzan} \\ \text{si } k = 1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow \text{rango}(M) = 2 \neq \text{rango}(MA) = 3 \Rightarrow \text{las rectas son paralelas} \end{cases}$$

b) Tenemos que hallar un punto en cada recta que estén en una perpendicular común a ambas. Para ello hallamos un plano perpendicular a las dos rectas y los puntos de corte del plano con las rectas. El vector normal al plano será el de dirección de ambas rectas que es: $n = (-1, 1, 0)$. Elegimos que pase por $P(1, 1, 0)$ con lo que ya sabemos donde corta a la recta r_1 . Ese plano es:

$$\pi: -1 \cdot x + 1 \cdot y + 0 \cdot z + k = 0 \quad \text{y pasa por } P, \text{ luego } -1 + 1 + k = 0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: -x + y = 0}$$

$$\text{Hallamos el punto de corte del plano } \pi \text{ con la recta } r_2: \left. \begin{matrix} r_2: \begin{cases} x + y = 3 \\ z = 3 \\ \pi: -x + y = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow 2y = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow Q = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 3 \right) \end{matrix} \right\}$$

$$\text{La distancia entre las dos paralelas es la distancia entre los puntos } P \text{ y } Q: d(r_1, r_2) = d(P, Q) = \sqrt{\left(\frac{3}{2}-1\right)^2 + \left(\frac{3}{2}-1\right)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{\frac{19}{2}}$$

Valor	Nota
25	

3. a) Hallar la ecuación del plano π que contiene al punto A $(1, 1, -2)$ y a la

$$\text{recta } r: \begin{cases} x + y - 2z = 2 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

b) Hallar la ecuación de la recta r' que pasa por A y B $(2, 1, 0)$.

c) ¿Qué ángulo forman la recta r' y el plano π .

a) Hallamos dos puntos de la recta r que junto al punto A determinan el plano π :

$$x=0 \Rightarrow \begin{cases} y-2z=2 \\ -y+z=0 \end{cases} \Rightarrow y=-2; z=-2 \Rightarrow P(0, -2, -2); \quad x=1 \Rightarrow \begin{cases} 1+y-2z=2 \\ 1-y+z=0 \end{cases} \Rightarrow y=1; z=0 \Rightarrow Q(1, 1, 0)$$

El plano está determinado por A y los vectores $\overline{AP} = (0, -2, -2) - (1, 1, -2) = (-1, -3, 0)$; $\overline{AQ} = (1, 1, 0) - (1, 1, -2) = (0, 0, 2)$.

$$\text{Luego la ecuación del plano es: } \pi: \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ y-1 & -3 & 0 \\ z+2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -6 \cdot (x-1) + 2 \cdot (y-1) = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: -3x + y + 2 = 0}$$

b) El vector de dirección de r' es el vector $\overline{AB} = (2, 1, 0) - (1, 1, -2) = (1, 0, 2)$. La recta r' pasa por A y B (podemos usar el que queramos), luego su

$$\text{ecuación continua es: } \boxed{r': \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+2}{2}}$$

c) El ángulo α entre una recta y un plano es el complementario del ángulo formado por las direcciones de la recta y la normal al plano. El vector normal al plano π es: $n = (-3, 1, 0)$. Calculamos el coseno del ángulo entre ambas direcciones:

$$\cos(\widehat{v, n}) = \frac{v \cdot n}{|v| \cdot |n|} = \frac{1 \cdot (-3) + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{-3}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{-3}{5\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{(v, n)} = \cos^{-1}\left(\frac{-3}{5\sqrt{2}}\right) = 115^\circ 6' 15'' \Rightarrow \alpha = 115^\circ 6' 15'' - 90^\circ = \boxed{25^\circ 6' 15''}$$