Nota

Prueba 2.02 - 2º Bach C

Geometría

Nombre:... 25/01/11

Elige una de las dos opciones y contesta a todas sus preguntas.
Tiempo disponible 1 h. 30 min.

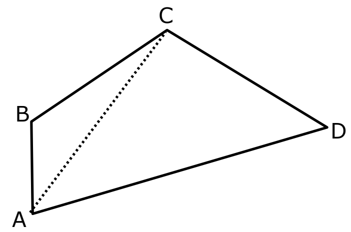
OPCIÓN A

Valor	Nota
25	

1. a) Comprueba que los puntos siguientes son coplanarios:
A (1, 1, –1); B(1, 2, –2); C (2, 1, -3) y D (0, 3, -1)

b) Averigua el área del cuadrilátero ABCD que forman.

a) Si los puntos son coplanarios, los vectores $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ serán coplanarios, por tanto formarán un sistema linealmente dependiente. Podemos comprobarlo, por ejemplo, haciendo el producto mixto; si el valor de éste es cero serán dependientes y por tanto coplanarios:



$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]=\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \text{A, B, C y D son coplanarios.}$$

b) Descomponemos el cuadrilátero ABCD en dos triángulos ABC y ACD. Para hallar el área de cada uno de ellos usaremos el producto vectorial:

$$Área(ABCD)=Área(ABC)+Área(ACD)=\frac{\left|\overrightarrow{AB}x\overrightarrow{AC}\right|}{2}+\frac{\left|\overrightarrow{AC}x\overrightarrow{AD}\right|}{2}=(*)$$

Calculamos los dos productos: $\overrightarrow{AB}x\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}=-2i-j-k$; $\overrightarrow{AC}x\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=4i+2j+2k$ y sustituimos en (*):

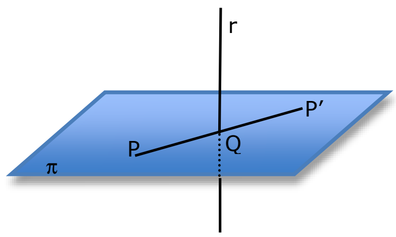
$$(*)=\frac{\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+(-1)^2}}{2}+\frac{\sqrt{4^2+2^2+2^2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{24}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{2\sqrt{6}}{2}=\boxed{\frac{3\sqrt{6}}{2}}$$

Valor	Nota
25	

2. a) Determina la ecuación de la recta *s* que pasa por el punto P (2, 1, 0) y es perpendicular a la recta $r:\begin{cases} x=3 \\ y+z=5 \end{cases}$.

b) Averigua otro punto en la recta *s* que esté a la misma distancia de la recta *r* que el punto P.

a) Hallamos el plano π que pasa por P y es perpendicular a *r*. El vector normal de π es el vector de dirección de *r*.: $n=v_r=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-j+k \Rightarrow n=(0,-1,1)$, luego la ecuación del plano es de la forma $\pi:-y+z=k$ e imponiendo la condición de que P esté en dicho plano, es decir sus coordenadas cumplan la ecuación, tenemos: $-1+0=k \Rightarrow k=-1 \Rightarrow \boxed{\pi:-y+z=-1}$



Ahora averiguamos el punto Q dónde corta ese plano a la recta *r*, resolviendo el sistema formado por las ecuaciones respectivas:

$$\left\{\begin{array}{l} x=3 \\ \left.\begin{array}{l} y+z=5 \\ -y+z=-1 \end{array}\right\} \end{array}\right. \Rightarrow 2z=4 \Rightarrow z=2 \Rightarrow y=5-z=3$$. Es decir, el punto Q es el (3, 3, 2).

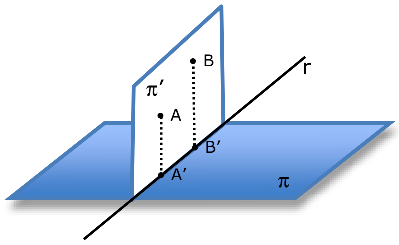
La recta perpendicular a *r* que pasa por P es la recta PQ: $s:\frac{x-2}{3-2}=\frac{y-1}{3-1}=\frac{z-0}{-2-0} \Rightarrow \boxed{s:\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-2}}$

b) El punto P' que nos piden es el simétrico de P (a, b, c) respecto de la resta *r*, y por lo tanto, Q es el punto medio del segmento PP'. Luego:

$$\frac{2+a}{2}=3 \Rightarrow a=4;\ \frac{1+b}{2}=3 \Rightarrow b=5;\ \frac{0+c}{2}=2 \Rightarrow c=4\text{, luego } \boxed{P'=(4,5,4)}$$

Valor	Nota
25	

3. Dados los puntos A (0, 1, 1) y B (3, −1, 1) y el plano $\pi: 2x - y + z + 1 = 0$:
   a) Halla la ecuación general del plano que pasa por A y B y es perpendicular al plano π.
   b) ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por los puntos A' y B' sobre los que se proyectan A y B en el plano π.
   c) ¿A qué distancia está A' de B'?



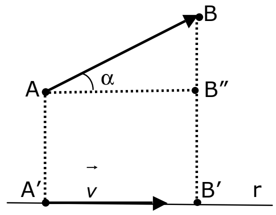
a) El plano π' debe contener al vector normal al plano π, que es $\vec{n}(2,-1,1)$ y al vector $\overrightarrow{AB}=(3,-2,0)$ y por tanto a los puntos A y B. Su ecuación es:

$$\pi': \begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 0+3\cdot(y-1)-4\cdot(z-1)+3\cdot(z-1)+0+2x=0$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi': 2x+3y-z=2}$$

b) Los puntos A' y B' están en la intersección de los dos planos π y π'. Luego la recta r queda definida por ellos: $\boxed{r: \begin{cases} 2x-y+z=-1 \\ 2x+3y-z=2 \end{cases}}$

c) En la figura se muestra la relación entre los puntos A y B, sus proyecciones y el vector de dirección de la recta r.



El vector de dirección de la recta r es: $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -2\vec{i}+4\vec{j}+8\vec{k} \Rightarrow \vec{v}=(-1,2,4)$, que es paralelo al que hemos obtenido. La distancia entre A' y B' es la proyección del vector $\overrightarrow{AB}$ sobre la dirección de la recta r, es decir, sobre el vector v. Por lo tanto:

$$d(A',B') = d(A,B'') = proy_{\vec{v}}(\overrightarrow{AB}) = \frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{|3\cdot(-1)+(-2)\cdot 2+0\cdot 4|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+4^2}} = \frac{7}{\sqrt{21}} = \frac{7\sqrt{21}}{21} = \boxed{\frac{\sqrt{21}}{3}}$$

Valor	Nota
25	

4. Dada la recta $r: x = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-3}{-2}$, se pide:
   a) Averiguar si está contenida, corta o es paralela al plano $\pi: 3x + 2y = 6$.
   b) Halla la ecuación de la recta s que pasa por el punto P (2, 0, 0), está contenida en el plano π y que tiene dirección perpendicular a la recta r.
   c) ¿Cuál es la posición relativa de r y s.

a) El vector de dirección de la recta r es $\vec{v}=(1,-1,-2)$ y el vector normal del plano π es $\vec{n}=(3,2,0)$. Para que la recta esté contenida en el plano o sea paralela a este el producto escalar de ambos vectores debe ser nulo. Sin embargo, el producto escalar es $\vec{v}\cdot\vec{n}=1\cdot 3+(-1)\cdot 2*(-2)\cdot 0=1\neq 0$. En consecuencia, la recta r corta al plano π.

b) La recta s debe estar en el plano π, luego su vector de dirección v' debe ser perpendicular al vector normal del plano. Como debe tener dirección perpendicular a la dirección de la recta r, también debe ser perpendicular a su vector de dirección v. En consecuencia debe ser de la misma dirección que el producto vectorial de ambos vectores. Luego $\vec{v}'=\vec{v}\times\vec{n}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4\vec{i}-6\vec{j}+5\vec{k} \Rightarrow \vec{v}'=(4,-6,5)$.

La recta s pasa por P y tiene como vector de dirección a v': $\boxed{s: \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y}{-6} = \dfrac{z}{5}}$

c) Sin más que ver los vectores de dirección podemos decir que ni son paralelas ni coincidentes, así que se cortan o se cruzan. Podemos estudiar el rango del sistema formado por las ecuaciones de ambas rectas, pero también podemos comprobar si el volumen de un paralelepípedo determinado por los dos vectores de dirección y un vector cualquiera que una ambas rectas es cero o no lo es. En el primer caso las rectas se cortan y en el otro se cruzan.

A (0, 2, 3) está en la recta r y P está en s. Luego el tercer vector será $\overrightarrow{AP}=(2,-2,-3)$ y el volumen es el producto mixto:

$$\left[\vec{v},\vec{v}',\overrightarrow{AP}\right] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 4 & -6 & 5 \\ 2 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 18-10+16-24-12+10=-2\neq 0$$ luego <u>las dos rectas se cruzan.</u>

OPCIÓN B

Valor	Nota
25	

1. Dadas las rectas: $r: \frac{x-2}{2}=\frac{y-k}{3}=\frac{z}{-1}$ y $s: \frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-7}{3}$

   a) Determinar su posición relativa según los valores del parámetro *k*.

   b) Halla la ecuación general del plano que forman para los valores de *k* en el que las rectas se cortan.

a) Dados los vectores de dirección de las dos rectas, *v* y *v'*, ya podemos decir que ni son paralelas ni coincidentes. Sólo queda la posibilidad de que se corten o se crucen. El vector que une A (2, k, 0) y B (−2, 1, 7) une ambas rectas. Como en el problema anterior, si el producto mixto de los dos vectores de dirección y el vector $\overrightarrow{AB}=(-4,1-k,7)$ es cero, las rectas se cortarán y en caso contrario se cruzarán.

$$\left[v,v',\overrightarrow{AB}\right]=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -4 & 1-k & 7 \end{vmatrix}=28-36+(1-k)-8-6\cdot(1-k)+21=5k \Rightarrow \begin{cases} \text{si } k=0 \Rightarrow \left[v,v',\overrightarrow{AB}\right]=0 \Rightarrow \text{se cortan} \\ \text{si } k\neq 0 \Rightarrow \left[v,v',\overrightarrow{AB}\right]\neq 0 \Rightarrow \text{se cruzan} \end{cases}$$

b) El vector normal del plano será el producto vectorial de los dos vectores de dirección y cualquiera de los puntos de una de las rectas servirá para definir el plano, por ejemplo el A (2, 0, 0), luego la ecuación del plano será:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-0 & z-0 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 9\cdot(x-2)+y+4z+3z+2\cdot(x-2)-6y=0 \Rightarrow \boxed{11x-5y+7z=22}$$

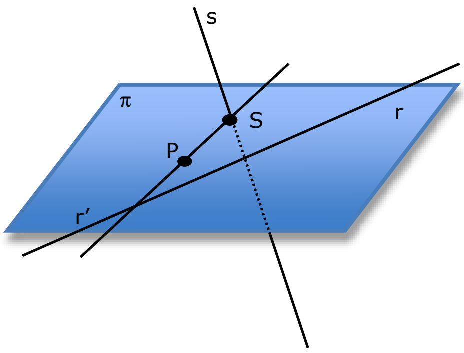
Valor	Nota
25	

2. a) Encuentra el plano que contiene a la recta $r: \begin{cases} 2x-y=1 \\ x-z=0 \end{cases}$ y que pasa por el punto P (0, 2, 2).

   b) Halla la ecuación de la recta que pasa por P y se apoya sobre la recta *r* (la de la cuestión anterior) y la recta $s: \begin{cases} x=-\lambda \\ y=3 \\ z=\lambda \end{cases}$.

a) Calculamos el vector de dirección de la recta *r* y un punto Q de ella. Para ello pasamos su ecuación a forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} 2x-y=1 \\ x-z=0 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} y=-1+2x \\ z=x \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x=\lambda \\ y=-1+2\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q=(0,-1,0) \\ v=(1,2,1) \end{cases}$$



El plano está definido por el vector de dirección *v* de la recta *r* por el punto P y el punto Q y por tanto por el vector $\overrightarrow{QP}=(0,3,2)$. Su ecuación es:

$$\pi: \begin{vmatrix} x-0 & y+1 & z-0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \boxed{\pi: x-2y+3z=2}$$

b) Como la recta que nos piden corta a la recta *r* y pasa por P, necesariamente estará contenida en el plano **π**. Luego para apoyarse o cortar a la otra recta *s*, necesariamente debe hacerlo en el punto S donde ésta corta a plano **π**. Lo averiguamos sustituyendo en la ecuación de **π** las ecuaciones paramétricas de la recta s: $-\lambda-2\cdot 3+3\cdot\lambda=2 \Rightarrow 2\lambda=8 \Rightarrow \lambda=4 \Rightarrow S=(-4,3,4)$.

La recta que nos piden es la que pasa por P y por S; su vector de dirección es $\overrightarrow{PS}=(-4,1,2)$ y pasa por P (0, 2, 2) luego su ecuación es:

$$\boxed{r': \frac{x}{-4}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-2}{2}}$$

Valor	Nota
25	

3. a) Dadas las rectas $r:\begin{cases}2x-z=2\\ y=-1\end{cases}$ y $s:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{4}$ comprueba que se cruzan.

b) Halla la ecuación de la perpendicular común a ambas rectas.

a) Esta vez lo haremos estudiando el rango del sistema formados por las ecuaciones de las dos rectas:

$$\begin{cases}2x-z=2\\ y=-1\\ -x+2=3y-6\\ 4y-8=-z-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x-z=2\\ y=-1\\ x+3y=8\\ 4y+z=7\end{cases}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}2&0&-1&2\\0&1&0&-1\\1&3&0&8\\0&4&1&7\end{array}\right)\begin{array}{c}F_3\\F_2\\2F_3-F_1\\F_4-4F_2\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&0&8\\0&1&0&-1\\0&6&1&14\\0&0&1&11\end{array}\right)$$

$$F_3-6F_2\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&0&8\\0&1&0&-1\\0&0&1&20\\0&0&1&11\end{array}\right)F_4-F_3\left(\begin{array}{ccc|c}1&3&0&8\\0&1&0&-1\\0&0&1&20\\0&0&0&-9\end{array}\right)\Rightarrow rango(M)=3 \text{ y } rango(MA)=4 \Rightarrow \text{las rectas se cruzam}$$

Las ecuaciones paramétricas de las dos rectas nos dan dos puntos genéricos de ambas rectas:

$$r:\begin{cases}2x-z=2\\ y=-1\end{cases}\Rightarrow r:\begin{cases}y=-1\\ z=-2+2x\end{cases}\Rightarrow r:\begin{cases}x=\lambda\\ y=-1\\ z=-2+2\lambda\end{cases};\quad s:\frac{x-2}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{4}\Rightarrow s:\begin{cases}x=2+3\mu\\ y=2-\mu\\ z=-1+4\mu\end{cases}$$

El vector $\overrightarrow{RS}$ que une dos puntos genéricos de las rectas, debe ser ortogonal a los dos vectores de dirección: $v=(1,0,2)$ y $v'=(3,-1,4)$

$$\overrightarrow{RS}=(2+3\mu-\lambda,2-\mu+1,-1+4\mu+2-2\lambda)=(2+3\mu-\lambda,3-\mu+1,1+4\mu-2\lambda)$$

$$\left.\begin{array}{l}v\cdot\overrightarrow{RS}=1\cdot(2+3\mu-\lambda)+0\cdot(3-\mu+1)+2\cdot(1+4\mu-2\lambda)=3+11\mu-5\lambda=0\\ v'\cdot\overrightarrow{RS}=3\cdot(2+3\mu-\lambda)+(-1)\cdot(3-\mu+1)+4\cdot(1+4\mu-2\lambda)=7+26\mu-11\lambda=0\end{array}\right\}$$

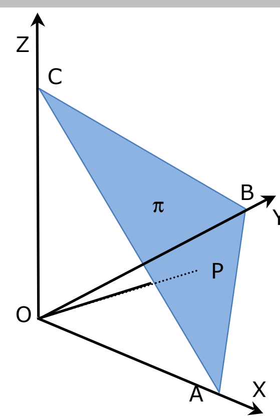
Resolviendo el sistema formado por estas ecuaciones se obtiene: $\lambda=3;\ \mu=1\Rightarrow R=(3,-1,4)$ y $S=(5,1,3)$. La recta que nos piden pasa por uno de los dos puntos y tiene a $\overrightarrow{RS}=(2,2,-1)$ como vector de dirección. Luego la ecuación de la recta es: $\boxed{r:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-4}{-1}}$

Valor	Nota
25	

4. a) Determina la ecuación del plano π, cuyo punto más cercano al origen de coordenadas es el punto P (−1, 3, 4).

b) ¿Cuál es el volumen del tetraedro formado por el plano π, y los ejes de coordenadas.

c) ¿Cuál es el área total de ese tetraedro?



a) El segmento OP debe ser perpendicular al plano π, luego $\overrightarrow{OP}$ será su vector normal. y pasará por el punto P, luego la ecuación es:

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PX}=0\Rightarrow(-1,3,4)\cdot(x+1,y-3,z-4)=0\Rightarrow\boxed{\pi:-x+3y+4z=26}$$

b) Los puntos de cortes con los ejes son:

$$A=OX\cap\pi\Rightarrow\begin{cases}y=0\\ z=0\\ -x+3y+4z=26\end{cases}\Rightarrow A=(-26,0,0) \text{ y análogamente: } B=\left(0,\frac{26}{3},0\right) \text{ y } C=\left(0,0,\frac{13}{2}\right)$$

El volumen del tetraedro es $\left|\frac{1}{6}\cdot\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right]\right|=\left|\frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix}-26&0&0\\0&26/3&0\\0&0&13/2\end{vmatrix}\right|=\boxed{\dfrac{2197}{9}}$

c) El tetraedro tiene cuatro caras triangulares cada una de ellas determinada por una pareja de vectores. Por ello su área lateral será:

$$\text{Área total}=\frac{|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|}{2}+\frac{|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC}|}{2}+\frac{|\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}|}{2}+\frac{|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|}{2}=\boxed{\frac{676}{3}+\frac{169\sqrt{26}}{6}}$$