Funciones continuas

1. Sea la función $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$

   a) ¿Cuál es su dominio?

   b) Calcula los límites laterales cuando x tiende 2. ¿Cuánto vale $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{(x-2)^2}$?

2. Sea la función $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\begin{cases} f(x) = x+2 & \text{si } x \le 1 \\ f(x) = (x-3)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

   a) Dibújala

   b) Calcula los límites laterales cuando x tiende a 1. ¿Cuánto vale $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$?

3. Considerar la función $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x \ne 1 \\ f(x) = 3 & \text{si } x = 1 \end{cases}$.

   Probar que es una función discontinua en $x = 1$. ¿Cómo debería redefinirse la función en $x = 1$, para evitar la discontinuidad?

4. Definimos la función *signo de* x así: $sign:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\begin{cases} sign(x) = 1 & \text{si } x > 0 \\ sign(x) = 0 & \text{si } x = 0 \\ sign(x) = -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

   a) Dibújala.

   b) ¿Es continua en $x = 0$? Explica por qué.

5. Dadas las siguientes funciones:

   i) $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si } x \le 0 \\ 2x-3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ ii) $g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 3 \\ x^2 & \text{si } 3 \le x < 4 \\ 0 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$

   iii) $h(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x < 1 \\ x^2-1 & \text{si } 1 \le x < 2 \\ x^2 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$ iv) $k(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x^2}{2} & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

   a) Dibújalas.

   b) Averigua los puntos de discontinuidad de cada una de ellas.

6. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x}$.

7. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } |x| \le 1 \\ 1 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$. Represéntala.

8. Calcular el valor de a para que la función $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \le 0 \\ -x^2+x+a-1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ sea continua en todo $\mathbb{R}$. Dibuja la gráfica de la función obtenida.

9. Calcula el valor de a y de b para que la función $f(x) = \begin{cases} -x-2 & \text{si } x < -1 \\ ax+b & \text{si } -1 \le x < 1 \\ x^2 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$ para que sea continua en $\mathbb{R}$. Dibuja la gráfica de la función obtenida.

10. Demostrar que la función $f(x) = x^3 + x - 1$ tiene al menos un corte con el eje X en el intervalo [0, 1].

11. Demuestra que la ecuación $x - \cos x = 0$ tiene una solución real, y, utilizando el método de la bisección, calcula esta solución aproximándola a las décimas.

12. La función $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$ tiene signos distintos en los extremos del intervalo $[0, \pi]$ y, sin embargo, no se anula en él. ¿Contradice esto el teorema de Bolzano? Explica tu respuesta.

13. Demuestra que la gráfica de la función $f(x) = \ln(x - 3)$ corta al eje X en un punto.

14. Demuestra que la ecuación $x^{20} - \operatorname{sen} x = 0$ tiene al menos una solución real.

15. Demuestra que la función $f(x) = x \cdot \operatorname{sen} x + x$ toma el valor 2 en algún punto de su dominio.

16. a) Comprueba que la ecuación $x^3 + 4x^2 - 5x - 4 = 0$ tiene tres raíces reales.
    b) Calcula tres intervalos de longitud 1 en los que estén incluidas las raíces.

17. Demuestra que una ecuación polinómica de tercer grado tiene por lo menos una solución real.

18. Demuestra que las gráficas de las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$ se cortan en un punto $x > 0$. Calcula el valor del punto de intersección con una cifra decimal exacta.

19. Demuestra que las gráficas de la funciones $f(x) = \ln x$ y $g(x) = -x$ se cortan en un punto. Calcula el valor del punto de corte con dos cifras decimales exactas.

20. Demuestra que las gráficas del las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = \ln x$ se cortan en un punto $x > 0$. Calcula el valor del punto de corte con dos cifras decimales exactas.

21. Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas en el intervalo $[a, b]$, tales que:

$$f(a) = 3, \quad f(b) = 5, \quad g(a) = 2, \text{ y } \quad g(b) = 7$$

    Demuestra que sus gráficas se cortan en un punto.

22. Si el término independiente de un polinomio es −5 y el valor del polinomio cuando $x = 3$ es 7, demuestra que hay algún punto en el intervalo [0, 3] en el que el polinomio toma el valor 3.

23. Demuestra que si $f(x)$ es una función continua en el intervalo [0, 1] tal que para todo $x \in (0,1)$ verifica que $0 < f(x) < 1$, entonces existe al menos un valor $c \in (0,1)$ tal que $f(c) = c$.
    [Ayuda: aplica el teorema de Bolzano a la función $h(x) = f(x) - x$]

24. Demuestra que la función $f(x) = (x - a)(x - b) + x$ toma el valor $\dfrac{a+b}{2}$ en algún punto del intervalo (a, b), cualquiera que sean los valores *a a* b.

25. Al hacer un recorrido continuo por una carretera con una pendiente muy pronunciada, un ciclista lleva una velocidad de 8 km/h cuando pasa por el kilómetro 125 y de 6 km/h cuando pasa por el kilómetro 124.
    a) ¿Existe algún punto entre los dos kilómetros en el que el ciclista fuese a una velocidad de 7 km/h?
    b) ¿Puede asegurarse que no ha habido ningún momento entre los dos puntos donde el ciclista haya llevado una velocidad de 20 km/h?