1 Cuando el año 1800 Beethoven escribe su primera Sinfonía, su edad es diez veces mayor que la del jovencito Franz Schubert. Pasa el tiempo y es Schubert quien compone su célebre Sinfonía Incompleta. Entonces la suma de las edades de ambos músicos es igual a 77 años. Cinco años después muere Beethoven y en ese momento Schubert tiene los mismos años que tenía Beethoven cuando compuso su primera Sinfonía. Determinar el año de nacimiento de cada uno de estos dos compositores *(2.5 puntos)*

Nota: Solamente se calificarán los resultados obtenidos matemáticamente, no los derivados de los conocimientos histórico-musicales del examinando. (Junio 2004)

2 Sea el sistema

$$\begin{cases} x+3y+z=5 \\ ax+2z=0 \\ ay+z=a \end{cases}$$

Se pide clasificarlo según los valores del parámetro a (1.5 puntos) y resolverlo si en algún caso es compatible indeterminado *(1 punto).* (Junio 2004)

3 Sea el sistema homogéneo de ecuaciones $\begin{cases} x+y-2z=0 \\ ax-y+z=0 \\ x+2ay-z=0 \end{cases}$

a) Determinar el valor o valores del parámetro a para que el sistema tenga soluciones distintas de la nula *(1.5 puntos).*

b) Resolver el sistema para el valor o valores de a hallados en el apartado anterior *(1 punto)*. (Septiembre 2004)

4 Determinar una matriz cuadrada X que verifique $AX + XA = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

(2 puntos).

Luego analizar si la matriz es inversible, y en el caso de serlo calcular su matriz inversa *(0.5 puntos).* (Septiembre 2004)

5 Eva, Marta y Susana son tres jóvenes amigas que se comprometen a leer el Quijote este verano. Cada una por separado y en función del tiempo del que dispone, decide leer un mismo número de páginas cada día hasta terminar la obra. Eva leerá diariamente 5 páginas más que Marta y ésta 6 páginas más que Susana. Por ello Eva terminará la obra dos semanas antes que Marta y ésta 30 días antes que Susana. Se pregunta cuál es el total de páginas que tiene la versión de la inmortal obra cervantina que leen estas amigas. *(2.5 puntos).* (Junio 2005)

6 La terna (0, 0, 0) es siempre solución del sistema $\begin{cases} x+2y-az=0 \\ ax-y+z=0 \\ 2ax+y-z=0 \end{cases}$

independientemente del valor del parámetro a.

a) Indicar para qué valores del parámetro la citada terna es la única solución del sistema. *(1.5 puntos).*

b) Indicar algún valor del parámetro, si existe, para el cual el sistema tenga algunas soluciones distintas de la nula y mostrar estas soluciones. (Nota: Si se encuentran varios valores del parámetro cumpliendo la condición pedida, para responder a esta cuestión basta tomar uno solo de ellos). *(1 punto).* (Junio 2005)

7 A, B y C son tres ciudades que forman un triángulo de manera que entre cada dos de ellas hay una carretera recta que las une. Se sabe que si se va de A a B dando la vuelta por C se hace un recorrido tres veces mayor que si se va directamente de A a B . Asimismo si para ir de A a C se da la vuelta por B el recorrido es el doble que si se va directamente de A a C.

Calcular las distancias entre las tres ciudades sabiendo que la suma de las tres distancias es igual a 120 kilómetros *(2.5 puntos).* (Septiembre 2005)

8 Estudiar según el valor del parámetro λ, el sistema de ecuaciones $\begin{cases} \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = \lambda \\ x + y + z = \lambda^2 \end{cases}$ y resolverlo si en algún caso es compatible indeterminado *(2.5 puntos)*. (Septiembre 2005)

9 Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \lambda & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ donde λ es un número real.

a) *(1.5 puntos)* Encontrar los valores de λ para los que la matriz AB tiene inversa.

b) *(1 punto)* Dados a y b números reales cualesquiera, ¿puede ser el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ compatible determinado con A la matriz del enunciado? (Junio 2006)

10 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab \\ ab & a^2 & b^2 \\ ab & b^2 & a^2 \end{pmatrix}$

a) *(1.5 puntos)* Sin utilizar la regla de Sarrus, calcular el determinante de dicha matriz.

b) *(1 punto)* Estudiar el rango de A en el caso en que b = -a. (Junio 2006)

11 La liga de fútbol de un cierto país la juegan 21 equipos a doble vuelta. Este año, los partidos ganados valían 3 puntos, los empatados 1 punto y los perdidos 0 puntos. En estas condiciones, el equipo campeón de liga obtuvo 70 puntos. Hasta el año pasado los partidos ganados valían 2 puntos y el resto igual. Con el sistema antiguo, el actual campeón hubiera obtenido 50 puntos. ¿Cuantos partidos gano,empato y perdió el equipo campeón?. *(2.5 puntos)* (Septiembre 2006)

12 Teniendo en cuenta que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 7$ calcular el valor del siguiente determinante sin desarrollarlo $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ a+p & b+q & c+r \\ -x+a & -y+b & -z+c \end{vmatrix}$ (Septiembre 2006)

13 Considerar el sistema lineal de ecuaciones en x, y y z $\begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ mx + 2z = 0 \\ my - z = m \end{cases}$

a) *(1 punto)* Determinar los valores del parámetro m para los que el sistema tiene solución única.

Calcular dicha solución para $m=1$.

b) *(1 punto)* Determinar los valores del parámetro m para los que el sistema tiene infinitas soluciones. Calcular dichas soluciones.

c) *(0.5 ptos)* Estudiar si existe algún valor de m para el cual el sistema no tiene solución.
(Junio 2007)

14 *(2.5 puntos)* Un cajero automático contiene 95 billetes de 10, 20 y 50 euros y un total almacenado de 2000 euros. Si el número total de billetes de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20, averiguar cuantos billetes de cada tipo hay. . (Junio 2007)

15 Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}, \quad I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) *(0,5 puntos)* Comprobar que $\det(A^2)=\left(\det(A)\right)^2$

b) *(1 punto)* Estudiar si para cualquier matriz $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de orden 2 se cumple que

$$\det(M^2)=\left(\det(M)\right)^2$$

c) *(1 punto)* Encontrar la relación entre los elementos de las matrices M cuadradas de orden 2 que satisfacen $\det(M+I)=\det(M)+\det(I)$ (Septiembre 2007)

16 Sean $A=\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & k & t \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) *(0.5 puntos)* Estudiar para qué valores de α y β la matriz A tiene inversa.
b) *(1 punto)* Calcular A^5.
c) *(1 punto)* Hallar la matriz inversa de B. (Septiembre 2007)

17 a) *(1,5 puntos)* Sean A, B, I las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Estudiar si existe algún valor de $\lambda\in\mathbb{R}$ para el cual se satisfaga $\left(A-\lambda I\right)^2=B$.

b) (1 punto) Teniendo en cuenta que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=1$, determinar el valor de $\begin{vmatrix} x & 1/4 & 4 \\ y & 0 & 4 \\ z & 1/2 & 12 \end{vmatrix}$

(Junio 2008)

18 *(2,5 puntos)* Dado el sistema $\begin{cases} x+3y-az=4 \\ -ax+y+az=0 \\ -x+2ay \quad =a+2 \\ 2x-y-2z=0 \end{cases}$

Discutirlo según los valores de a, y resolverlo cuando sea compatible. (Junio 2008)

19 *(2,5 puntos)* Hallar una matriz $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de orden 2 tal que

$A^{-1}XA=B$ siendo $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (Septiembre 2008)

20 a) *(1 punto)* Probar que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

b) *(1,5 puntos)* Hallar la solución del sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ x+4y+9z=2 \end{cases}$ que además satisface que la suma de los valores correspondientes a cada una de las incógnitas es 4. (Septiembre 2008)

21 a) *[1,5 puntos]* Discutir y resolver en función de los valores del parámetro *m* el sistema lineal

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ mx+m^2y+m^2z=1 \\ mx+my+m^2z=1 \end{cases}$$

b) *[1 punto]* Teniendo en cuenta que $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$

determinar el valor del determinante $\begin{vmatrix} 0 & a & a^2 \\ a^{-1} & 0 & a \\ a^{-2} & a^{-1} & 0 \end{vmatrix}$ (Junio 2009)

22 a) *[1,25 puntos]* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcular la inversa de la matriz A^n

b) [1,25 puntos] Estudiar para qué valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$, existe un único polinomio $P(x) = a + bx + cx^2$ que satisface $P(0) = \alpha$, $P(1) = 0$, $P(-1) = 0$. (Junio 2009)

23 a) *[1,5 puntos]* Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

de orden 2. Hallar la relación entre los parámetros *a*, *b* y *c* para que se verifique que $A^{-1} = 2I - A$.

b) *[1 punto]* Calcular, en función de los valores del parámetro *k*, el rango de la matriz

$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & k \end{pmatrix}$ (Septiembre 2009)

24 a) *[1,25 puntos]* Resolver el siguiente determinante sin utilizar la regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ -a+c & -b-a & -c+b \\ a+c & b-a & c+b \end{vmatrix}$$

b) *[1,25 puntos]* Para $M = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/4 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$, calcular M^n con $n \in \mathbb{N}$. (Septiembre 2009)

25 a) Estudiar para qué valores de a el determinante de la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 2a \\ 0 & a-1 & 0 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix}$ es no nulo. Para a = 3 , obtener el determinante de la matriz 2A . *(1,5 puntos)*

b) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Calcular el rango de $(AB)^T$.

(1 punto) (Junio 2010)

26 a) Estudiar para qué valores de x, la matriz inversa de $\begin{pmatrix} x & -2 \\ 5 & -x \end{pmatrix}$ coincide con su opuesta.

(1,5 puntos)
b) Dos hermanos de tercero y cuarto de primaria iban camino del colegio con sus mochilas cargadas de libros todos del mismo peso. Uno de ellos se lamentaba del peso que transportaba y el otro le dijo: *"¿De qué te quejas? Si yo te cogiera un libro, mi carga sería el doble que la tuya. En cambio si te diera un libro, tu carga igualaría a la mía"*
¿Cuántos libros llevaba cada hermano? *(1 punto)* (Junio 2010)

27 a) Discutir y resolver cuando sea posible el siguiente sistema lineal: *(1,75 puntos)*

$$\begin{cases} ax+y=0 \\ -2x+y+az=1 \\ y+az=1 \end{cases}$$

b) ¿Existe algún valor del parámetro a para el cual el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ sea solución del sistema anterior? *(0,75 puntos)* (Septiembre 2010)

28 Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} \cos\alpha & sen\alpha & 0 \\ -sen\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$

a) Estudiar si existen valores de α y β para los cuales la matriz A sea simétrica. ¿Será la matriz B = A A^T igual a la matriz identidad en algún caso? *(1 punto)*
b) Razonar cuál es la relación entre el determinante de A y el de B. *(0,75 puntos)*
c) Discutir y resolver cuando sea posible el sistema $B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *(0,75 puntos)* (Septiembre 2010)

29 a) *(1,25 puntos)* Estudiar para qué valores de α la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \alpha+1 & -1 & \alpha-2 \\ -1 & \alpha+1 & 2 \end{pmatrix}$ tiene rango máximo.
b) *(1,25 puntos)* Siendo A^{-1} la inversa de la matriz A , calcular , para α = -1. (Junio 2011)

30 a) *(1 punto)* Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} \cos\alpha & sen\alpha \\ -sen\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & sen\alpha \\ 0 & \beta & 0 \\ -sen\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$

Estudiar qué valores de α y β hacen que sea cierta la igualdad

$$\left(\det(A)\right)^2-2\det(A)\det(B)+1=0$$

b) *(1,5 puntos)* Utilizar las propiedades de los determinantes para calcular el valor de

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & a+3 & b+4 \\ 2 & c+3 & d+4 \end{vmatrix}$$ con a , b , c , $d \in \mathbb{R}$ (Junio 2011)

31 Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$

a) *(0,75 puntos)* Calcular el determinante de la matriz (A A^T) con A^T la traspuesta de A .

b) *(0,75 puntos)* Estudiar para qué valores del parámetro α se satisface la ecuación

$$4|A|^2-2|A^T|+2\alpha^2=0$$ con $|A|=\det(A)$.

c) *(1 punto)* Obtener la inversa de A cuando sea posible. (Septiembre 2011)

32 *(2,5 puntos)* Utilizar las propiedades de los determinantes para obtener los valores de a y b que satisfacen simultáneamente las ecuaciones

$$\begin{vmatrix} a+b & 1 & 2 \\ a-b & 0 & 1 \\ a+2b & 3 & 2 \end{vmatrix}=0$$ y $$\begin{vmatrix} a & a \\ a^2 & ba^2 \end{vmatrix}=0$$ (Septiembre 2011)

Nota: En la página web *Matemáticas en tu mundo* podéis encontrar una recopilación de exámenes de selectividad desde el año 1994. Hay colecciones de problemas resueltos agrupados por bloques temáticos.

El en lace es http://catedu.es/matematicas_mundo/PAU/PAU.htm